

## Задача С1

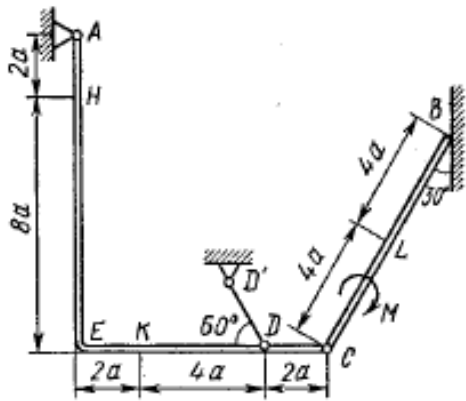
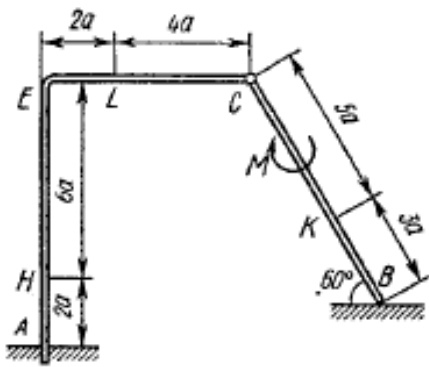
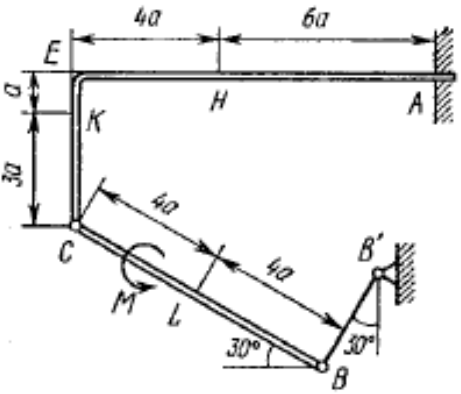
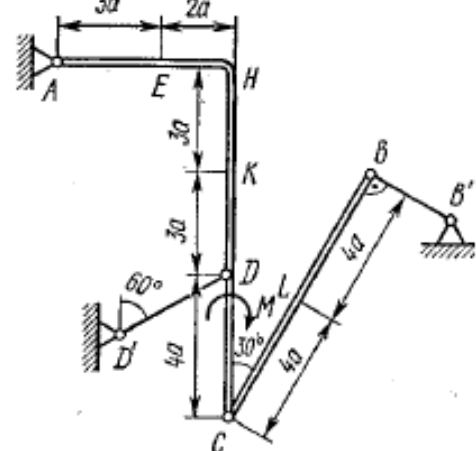
Составная плоская конструкция состоит из жесткого угольника и стержня, которые в точке  $C$  либо соединены внутренним шарниром (схемы 0-5), либо свободно опираются друг на друга (схемы 6-9). Внешними связями, наложенными на конструкцию, могут быть неподвижный цилиндрический шарнир, подвижный цилиндрический шарнир, жесткая заделка, невесомая стержневая опора, гладкая плоскость, на которую свободно опирается конструкция. Схемы конструкций приведены в Таблице 1.

На каждую конструкцию действуют: пара сил с моментом  $M$  ( $\kappa H \cdot m$ ), равномерно распределенная нагрузка интенсивности  $q$  ( $\kappa H/m$ ) и две сосредоточенные силы  $\bar{F}_i$  ( $\kappa H$ )  $i = 1, \dots, 4$ . Численные значения, места приложения и направления нагрузок приведены в Таблице 2.

Требуется определить реакции опор  $A$ ,  $B$  ( $A$ ,  $B$ ,  $D$  для схем 0, 3, 7, 8) и давление во внутренней связи  $C$  составной конструкции.

Вариант задания выбирается по последним двум цифрам зачетки: предпоследняя цифра – номер схемы (Таблица 1), последняя цифра – номер условия (Таблица 2). Например: №091365, схема – 6, условие – 5.

Таблица 1. Схемы конструкций

 <p style="text-align: center;">Схема 0</p>	 <p style="text-align: center;">Схема 1</p>
 <p style="text-align: center;">Схема 2</p>	 <p style="text-align: center;">Схема 3</p>

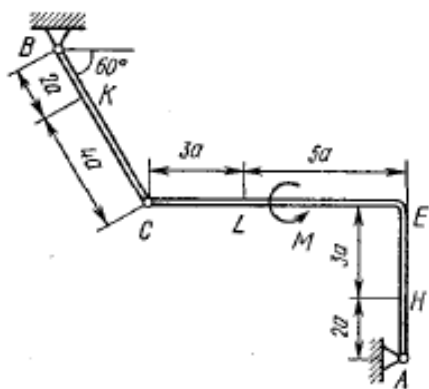


Схема 4

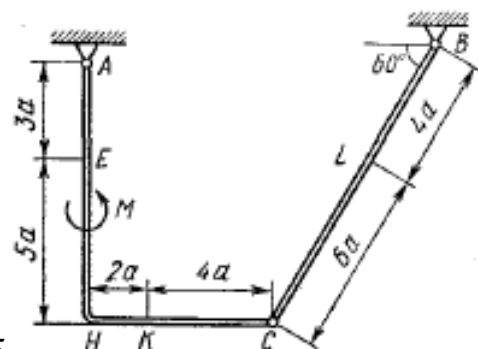


Схема 5

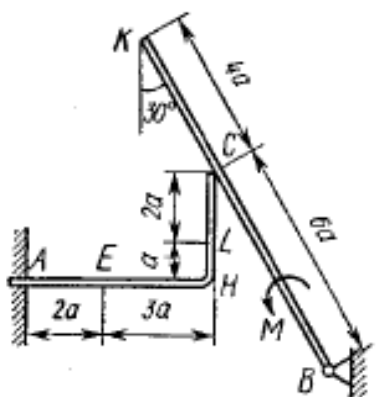


Схема 6

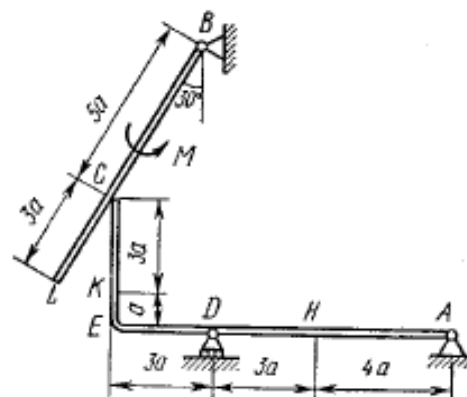


Схема 7

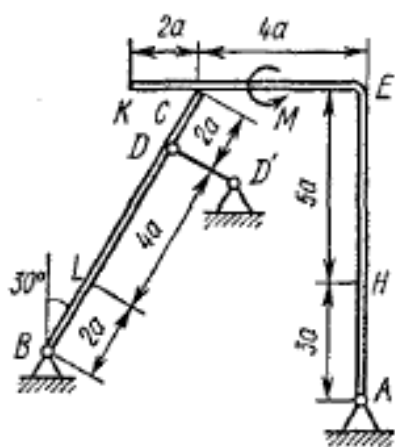


Схема 8

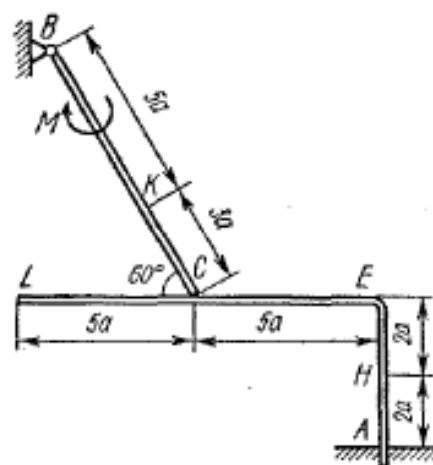
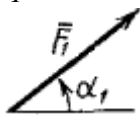
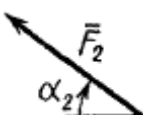
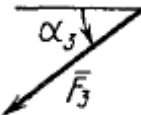
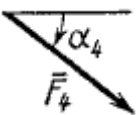


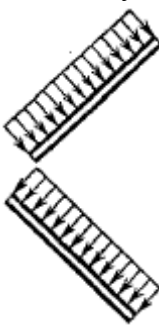


Схема 9

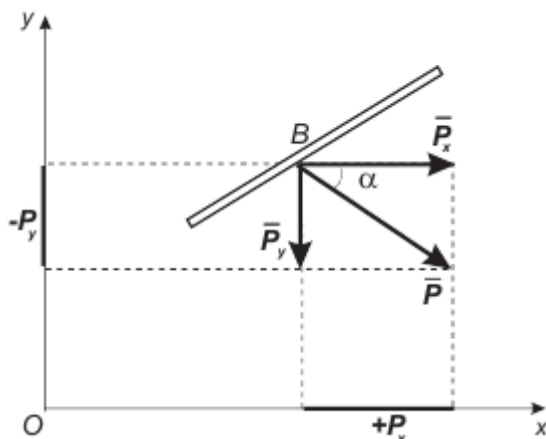
Таблица 2. Исходные данные (условия нагружения для схем)

№ условия	Длина $a$ , м	Момент $M$ , кН·м	Сосредоточенные силы								Распределенная нагрузка $q = 20 \text{ кН/м}$	
			$F_1 = 10 \text{ кН}$ 		$F_2 = 20 \text{ кН}$ 		$F_3 = 30 \text{ кН}$ 		$F_4 = 40 \text{ кН}$ 			
			Точка приложения	Угол наклона $\alpha_1^\circ$	Точка приложения	Угол наклона $\alpha_2^\circ$	Точка приложения	Угол наклона $\alpha_3^\circ$	Точка приложения	Угол наклона $\alpha_4^\circ$	Участок нагружения	Направление
0	0,1	40	K	60	—	—	H	30	—	—	CL	<div>На горизонтальных участках</div>  <div>На вертикальных участках</div>  <div>На наклонных участках</div> 
1	0,2	50	—	—	L	60	—	—	E	30	CK	
2	0,3	60	L	15	—	—	K	60	—	—	AE	
3	0,4	70	—	—	K	30	—	—	H	60	CL	
4	0,5	80	L	30	—	—	E	60	—	—	CK	
5	0,1	40	—	—	L	75	—	—	K	30	AE	
6	0,2	50	E	60	—	—	K	75	—	—	CL	
7	0,3	60	—	—	H	60	L	30	—	—	CK	
8	0,4	70	—	—	K	30	—	—	E	15	CL	
9	0,5	80	H	30	—	—	—	—	L	60	CK	

### Указания к решению задачи С1

Это задача на равновесие системы тел, находящихся под действием плоской системы сил. При ее решении можно или рассмотреть сначала равновесие всей системы в целом, а затем равновесие одного из тел системы, изобразив его отдельно, или же сразу расчленить систему и рассмотреть равновесие каждого из тел в отдельности, учтя при этом закон о равенстве действия и противодействия.

Разложение вектора силы на составляющие:



$$\vec{P} = \vec{P}_x + \vec{P}_y$$

$$P_x = P \cos \alpha$$

$$P_y = P \sin \alpha$$

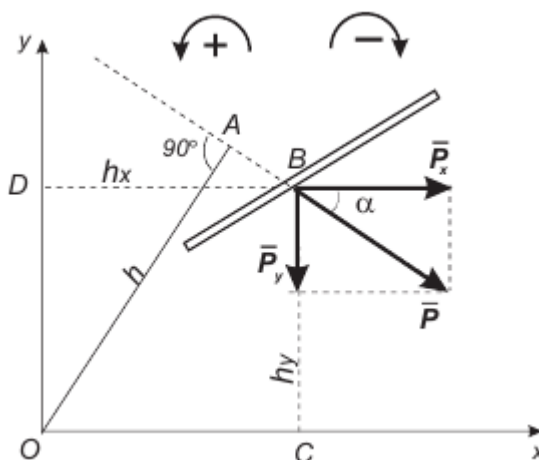
Проекции вектора силы на оси координат:

$$+P_x = +P \cos \alpha$$

$$-P_y = -P \sin \alpha$$

Проекция силы на ось положительна, если направление вектора силы и оси координат совпадают, проекция силы на ось отрицательна, если направление вектора силы и оси координат противоположны.

Момент силы относительно заданного центра:



$$M_O(\vec{P}) = \pm P \cdot h = \pm P_x \cdot h_y \pm P_y \cdot h_x$$

Момент равен произведению силы на плечо – кратчайшее расстояние от центра до линии действия силы (перпендикуляр на линию действия силы).

Момент равнодействующей силы равен сумме моментов ее составляющих (теорема Вариньона). Плечи сил:

$$h = OA, \quad OA \perp \bar{P}$$

$$h_x = BD, \quad BD \perp \bar{P}_y$$

$$h_y = BC, \quad BC \perp \bar{P}_x$$

Знак момента положительный, если сила вращает против часовой стрелки вокруг выбранного центра, и отрицательный, если сила вращает по часовой стрелке.

Уравнения равновесия для произвольной плоской системы сил имеют вид:

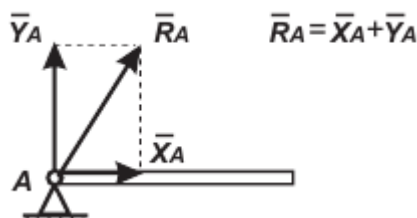
$$\begin{cases} \sum P_{xi} = 0 ; \\ \sum P_{yi} = 0 ; \\ \sum M_O(\bar{P}_i) = 0 \end{cases}$$

$P_{xi}, P_{yi}$  - проекции силы  $\bar{P}_i$  на оси координат  $x, y$ ;  $O$  – произвольная точка.

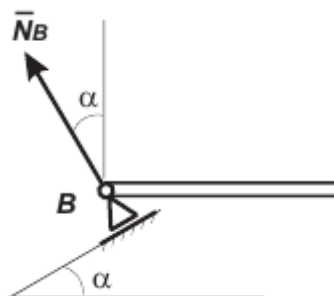
Т.е. суммы проекций всех сил на взаимно перпендикулярные оси и сумма моментов всех сил относительно произвольного центра равны нулю.

Внешние связи (опоры) и их реакции:

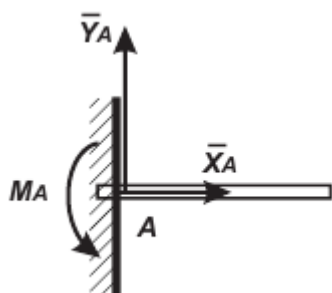
### 1. Неподвижный цилиндрический шарнир



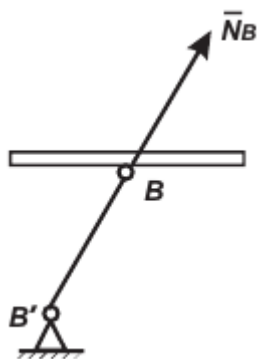
### 2. Подвижный цилиндрический шарнир



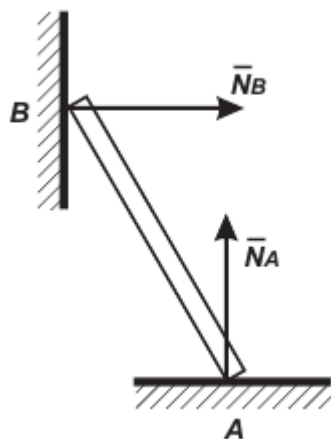
### 3. Жесткая заделка



#### 4. Стержневая опора

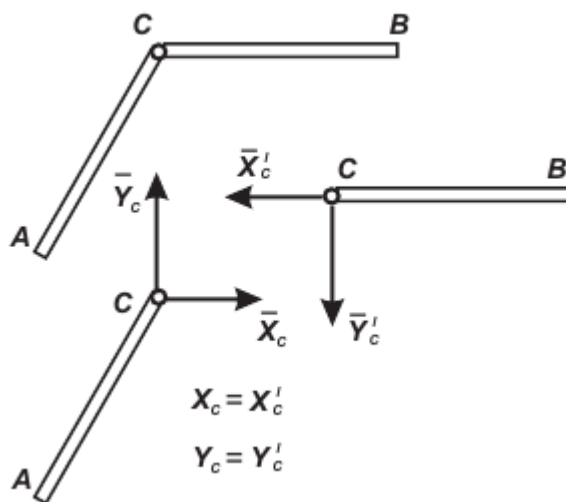


#### 5. Идеально гладкая плоскость

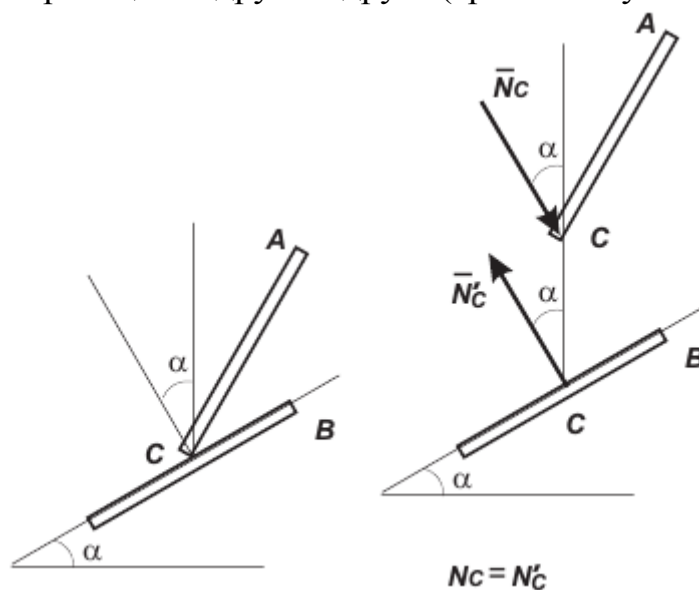


Внутренние связи и их реакции:

#### 1. Внутренний шарнир



## 2. Стержни, опирающиеся друг на друга (трение отсутствует)



### Пример решения задачи

Для составной конструкции, состоящей из угольника и стержня, скрепленных внутренним шарниром, определить реакции связей, вызванные заданными нагрузками.

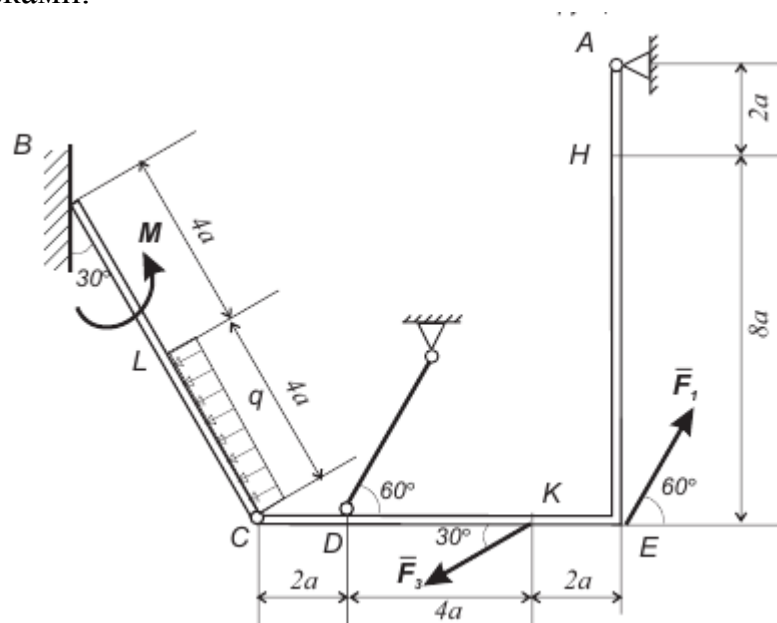


Рисунок 1. Расчетная схема конструкции

Исходные данные:

$a=0,5$  м;  $M=100$  кН м;  $F_1=40$  кН;  $\alpha_1=60^\circ$ ; точка приложения  $E$ ;  $F_3=20$  кН;  $\alpha_3=30^\circ$ ; точка приложения  $K$ ;  $q=50$  кН/м; участок действия нагрузки  $CL$ .

Определить: Реакции в неподвижном шарнире  $A$ , стержневой опоре  $D$ , реакцию, действующую со стороны вертикальной поверхности на стержень в точке  $B$ , давление во внутреннем шарнире  $C$ .

## Решение

Равнодействующая распределенной нагрузки :

$$Q = q l_{CL} = q \cdot 4a = 50 \cdot 4 \cdot 0,5 = 100 \text{ кН};$$

Составляющие распределенной нагрузки:

$$Q_x = Q \cos 30^\circ = 86,603 \text{ кН};$$

$$Q_y = Q \sin 30^\circ = 50,0 \text{ кН};$$

Составляющие сосредоточенных нагрузок:

$$F_{1x} = F_1 \cos 60^\circ = 20,0 \text{ кН}; \quad F_{1y} = F_1 \sin 60^\circ = 34,641 \text{ кН};$$

$$F_{3x} = F_3 \cos 30^\circ = 17,321 \text{ кН}; \quad F_{3y} = F_3 \sin 30^\circ = 10,0 \text{ кН}$$

Составляющие реакции стержневой опоры:

$$N_{Dx} = N_D \cos 60^\circ = 0,5 N_D;$$

$$N_{Dy} = N_D \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2} N_D = 0,866 N_D$$

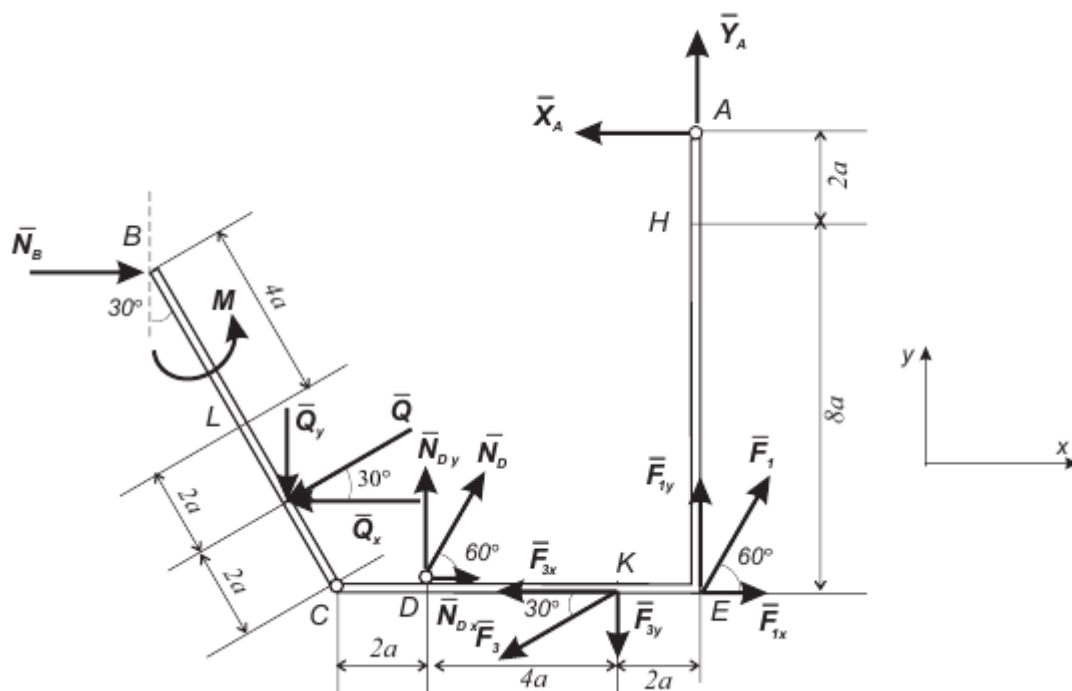


Рисунок 2. Схема сил для конструкции в целом

Конструкцию разобьем на две части по внутреннему шарниру С.

Уравнения равновесия левой половины (стержня):

$$\sum P_{xi} = 0 \Rightarrow X_C - Q_x + N_B = 0;$$

$$\sum P_{yi} = 0 \Rightarrow -Y_C - Q_y = 0;$$

$$\sum M_C(\bar{P}_i) = 0 \Rightarrow M - N_B 8a \cos 30^\circ + Q 2a = 0$$

Уравнения равновесия правой половины (угольника):



$$\sum P_{xi} = 0 \Rightarrow -X'_C - X_A + N_{Dx} + F_{lx} - F_{3x} = 0;$$

$$\sum P_{yi} = 0 \Rightarrow Y'_C + Y_A + N_{Dy} + F_{ly} - F_{3y} = 0;$$

$$\sum M_A(\bar{P}_i) = 0 \Rightarrow -X'_C 10a - Y'_C 8a - N_{Dy} 6a + N_{Dx} 10a + F_{lx} 10a - F_{3x} 10a + F_{3y} 2a = 0$$

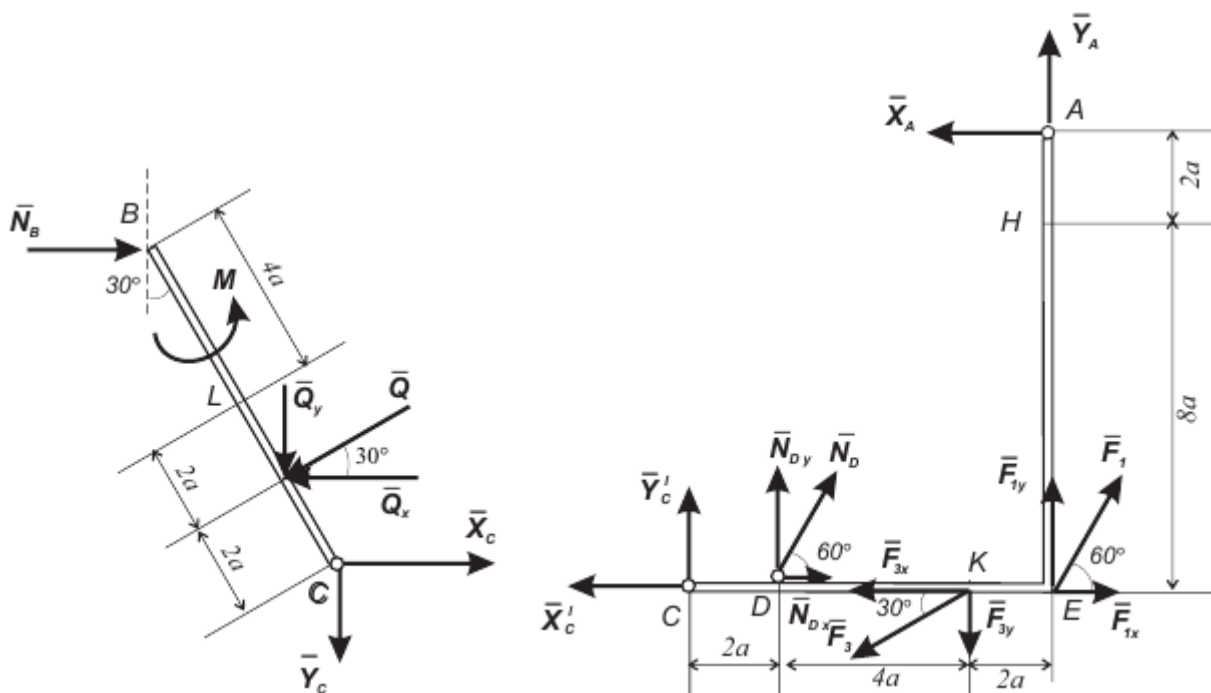


Рисунок 3. Схемы сил для правой (стержень) и левой (угольник) частей конструкции

Получена система шести уравнений равновесия относительно шести неизвестных реакций связей ( $X'_C = X_C$ ,  $Y'_C = Y_C$ ).

Определяем неизвестные реакции связей:

$$N_B = \frac{M + Q2a}{\cos 30^\circ 8a} = 57,735 \text{ кН},$$

$$X'_C = X_C = Q_x - N_B = 28,868 \text{ кН},$$

$$Y'_C = Y_C = -Q_y = -50,0 \text{ кН},$$

$$-X_C 10 - Y_C 8 - \frac{\sqrt{3}}{2} N_D 6 + 0,5 N_D 10 + F_{lx} 10 - F_{3x} 10 + F_{3y} 2 = 0$$

$$N_D = \frac{-X_C 10 - Y_C 8 + F_{lx} 10 - F_{3x} 10 + F_{3y} 2}{(3\sqrt{3} - 5)} = 806,107 \text{ кН},$$

$$N_{Dx} = 0,5 N_D = 403,053 \text{ кН},$$

$$N_{Dy} = \frac{\sqrt{3}}{2} N_D = 698,109 \text{ кН},$$

$$X_A = -X_C + N_{Dx} + F_{lx} - F_{3x} = 376,865 \text{ кН},$$

$$Y_A = -Y_C - N_{Dy} - F_{ly} + F_{3y} = -672,750 \text{ кН}$$

Отрицательные знаки некоторых реакций указывают, что их истинное направление противоположно направлению, выбранному на чертеже.

Составим проверочное уравнение для конструкции, не разделенной по шарниру С:

$$\sum M_E(\bar{P}_i) = 0 \Rightarrow$$

$$\begin{aligned} & X_A 10a - N_{Dy} 6a + M - N_B 8a \cos 30^\circ + F_{3y} 2a + \\ & + Q_y (8a + 2a \sin 30^\circ) + Q_x 2a \cos 30^\circ = \\ & = 376,865 \cdot 10 \cdot 0,5 - 698,109 \cdot 6 \cdot 0,5 + 100,0 - 57,735 \cdot 8 \cdot 0,5 \cdot 0,866 + 10,0 \cdot 2 \cdot 0,5 + \\ & + 50,0 \cdot (8 \cdot 0,5 + 2 \cdot 0,5 \cdot 0,5) + 86,603 \cdot 2 \cdot 0,5 \cdot 0,866 = 1784,327 - 1784,327 = 0 \end{aligned}$$

Проверка сошлась.

Ответ:

$$N_B = 57,735 \text{ кН},$$

$$X'_C = X_C = 28,868 \text{ кН},$$

$$Y'_C = Y_C = -50,0 \text{ кН},$$

$$N_D = 806,107 \text{ кН},$$

$$X_A = 376,865 \text{ кН},$$

$$Y_A = -672,750 \text{ кН}$$